887. Lie algebra ニ關スル Levi ノ定理

安倍　亮

§1. ハシガキ

$\mathfrak{R}$ ヲ Körper P ノ上ノ Lie-Algebra トスル。即チ $\mathfrak{R}$ ハ有限階ノ P-Modul:

$$\mathfrak{R} = Pu_1 + \cdots\cdots + Pu_r$$

デ $\mathfrak{R} \ni a, b$ ニ對シ，積 $a \circ b$ ガ定義サレ，コノ積ハ

1° $a \circ a = 0$

2° $a \circ (b \circ c) + b \circ (c \circ a) + c \circ (a \circ b) = 0$

3° $(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) \circ b = \alpha_1 (a_1 \circ b) + \alpha_2 (a_2 \circ b)$,

$\alpha_1, \alpha_2 \in P$

ヲ滿足スル。$\mathfrak{R}$ ハ Basis ノ積ノ式

$$u_i \circ u_j = \sum_k c_{ij}^k u_k, \quad c_{ij}^k \in P$$

デ完全ニ決ル。1°, 2° ニ照應シテ c_{ij}^k ハ

$$c_{ii}^k = 0, \quad c_{ij}^k = -c_{ji}^k,$$

$$\sum_t \left(c_{it}^s c_{jk}^t + c_{jt}^s c_{ki}^t + c_{kt}^s c_{ij}^t \right) = 0$$

ヲ滿足スル。

$\mathfrak{R}$ ノ P-Teilmodul $\mathfrak{a}$ ガ $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{a} \subset \mathfrak{a}$[1] ナルトキ，

1) $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ Teilmodul ナルトキ，$\sum a_i \circ b_i$ ($a_i \in \mathfrak{a}, b_i \in \mathfrak{b}$) ノ全体ヲ $\mathfrak{a} \circ \mathfrak{b}$，$a + b$ ($a \in \mathfrak{a}$, $b \in \mathfrak{b}$) ノ全体ヲ $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ ト書ク。

$\mathfrak{a}$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ Teilalgebra, $\mathfrak{a}\circ\mathfrak{R}\subset\mathfrak{a}$ ナルトキ Ideal ト云フ。$\mathfrak{R}\supset\mathfrak{R}'=\mathfrak{R}\circ\mathfrak{R}\supset\mathfrak{R}''=\mathfrak{R}'\circ\mathfrak{R}'\supset\cdots\cdots$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ Ideal ノ減少列デアル。之レガ (0) ニ終ルトキ $\mathfrak{R}$ ハ "可解" デアルト云フ。$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ ガ $\mathfrak{R}$ ノ可解 Ideal ナラ $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ モ可解 Ideal デアル。従ッテ $\mathfrak{R}$ ハ最大ノ可解 Ideal $\mathfrak{r}$ ヲ持ツ。$\mathfrak{r}$ ヲ Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ノ "Radikal" ト云フ。$\mathfrak{R}$ ノ mod $\mathfrak{r}$ ノ Restklassenalgebra $\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ ハ (0) 以外ニ可解 Ideal ヲモタナイ。コノヤウナ Lie-Algebra ハ "halbeinfach" デアルト云フ。

P ガ複素数ノバアヒニ Levi ハ次ノ定理ヲ証明シタ。

Levi ノ定理. Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ノ Radikal $\mathfrak{r}$ ニ関スル Restklassen ノ代表ガ, ソレ自身 Teilalgebra $\mathfrak{s}$ ヲナスヤウニトレル。即チ Modul トシテ $\mathfrak{R}=\mathfrak{r}+\mathfrak{s}$ (直和)。

$\mathfrak{s}\cong\mathfrak{R}/\mathfrak{r}$ ハ halbeinfach ナ Teilring デアルガ, 必ズシモ Ideal デハナイ。コノ定理ノ著シイ応用トシテハ, 任意ノ Lie 群芽ガ Lie 群ニ拡張デキル事ノ証明ニ此定理ガ使ハレル。[2)]

サテ, コノ定理ト全ク analog ナ定理ハ assoziative Algebra ノバアヒニモ成リ立ツ。[3)]

---

2) Pontrjagin: Topological groups, Chap. IX §54 参照。　　3) 次頁へ

上ノ定理ノ中デ Lie-Algebra トアルカヘリニ 唯 Algebra ト書ケバヨイノデアル。assoziativ ノトキハ，R/r ガ Grundkörper ヲ拡大シテモ常ニ halbeinfach デアリサヘスレバ定理ハ成立ツコトガ知ラレテヰル。例ヘバ Grundkörper P ガ vollkomen ナラインノ。ソコデ Lie-Algebra ノバアヒニモ P ハモット一般ニ出来サウナモノダト考ヘラレル。Lie 群トノ関係ハナクナルガ，代数ノ問題ニハナル。

Whitehead ハ Levi ノ定理ヲ P ガ複素数ノトキト實数ノトキト両方証明シテ居ル。[4] P ガ複素数ノトキノ証明ハ其ノマヽ P ガ任意ノ Charakteristik 0 ノ代数的閉体ノ場合ニ使ヘル。P ガ実数ノトキノ証明モ一寸シタ注意ヲ附ケ加ヘレバ一般ノ Charakteristik 0 ノ Körper ノ場合ニ使ヘル。

assoziativ ノ場合カラ類推スレバ，Charakteristik $\neq 0$ デモ P ガ vollkommen ナラ定理ハ成立チサウナモノデアル。併シ halbeinfach + Lie Algebra ノ構造ノ議論ハ今マデノ所デハ Charakteristik 0 ノトキニシカ使ヘナイカラ，若シ本當ダトシテモ証明ハ大分様子ヲ変ヘナケレバナラナイデアラウ。

以下大体 Whitehead ノヤリ方ニ從ッテ，P ガ一般

---

3) 例ヘバ Deuring Algebren S. 23.

4) J. H. C. Whitehead: Proc. Cambr. Phil. So v. 32 (1936) p. 229

ノ標數0ノ体ノトキニ Levi ノ定理ヲ証明スル。

§2. Halbeinfache Lie-Algebra.

P ハ今後断ラナクテモ標數0トスル。P ノ上ノ Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ノ各元 a ニ有限階ノ P-Modul $\mathfrak{M}$ ノ一次変換 A ガ對應シテヰルトスル：$a \longrightarrow A$. コノ對應ガ

$$a \longrightarrow A,\ b \longrightarrow B \text{ ナラ } \alpha a+\beta b \longrightarrow \alpha A+\beta B,$$
$$a \circ b \longrightarrow AB - BA = A \circ B$$

ヲ満足スルトキ，$a \longrightarrow A$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ表現ト云ヒ，$\mathfrak{M}$ ヲコノ表現ノ Darstellungsmodul トイフ。特ニ $\mathfrak{M}$ トシテ $\mathfrak{R}$ 自身ヲトル，a ヲキメタトキ $a \circ x$ ハ x ニ對スル一次変換デ $a \circ x = Ax$ ト書ケル。$a \longrightarrow A$ ヲ $\mathfrak{R}$ ノ正規表現ト云フ。

$a = \alpha^i u_i$[5] トシ，ソノ正規表現ヲ u_i ヲ Basis トシテ行列トシテカケバ

$$A = \alpha^i U_i\ ,\quad U_i u_j = u_i \circ u_j = c^k_{ij} u_k,$$
$$\therefore\ U_i = \| c^k_{ij} \| \quad (c^k_{ij} \text{ ハ } k \text{ 行 } j \text{ 列ノ元}).$$

$a = \alpha^i u_i$, $b = \beta^i u_i$ ニ對シ

$$\varphi(a, b) = Spur(AB) = \alpha^i \beta^j Spur(U_i U_j)$$
$$= g_{ij} \alpha^i \beta^j$$

---

5) 之レカラ先ハ Tensor ノ記法ニ従ッテ，上下ニアラハレル同ジ Index ガアレバ，ソレラニツイテ加ヘルコトニスル。

ナル α, β ノ對稱双一次形式 φ ヲ考ヘル。

$$g_{ij} = S_p(U_i U_j) = C^{\alpha}_{i\beta} C^{\beta}_{j\alpha} = g_{ji}$$

Cartan ニ從ッテ

$\boxed{\text{I}}$ Grundkörper P ガ Charakteristik 0 ナルトキ，$\mathfrak{R}$ ガ halbeinfach ナル必要十分條件ハ，φ ノ Diskriminante Det $\|g_{ij}\|$ ガ 0 デナイコトデアル。

從ッテ $\mathfrak{R}$ ガ halbeinfach ナラバ $\|g_{ij}\|$ ノ逆行列 $\|g^{ij}\|$ ガアル。

$$g_{i\alpha} g^{\alpha j} = \delta_i^j, \quad g^{ij} = g^{ji}.$$

コノ g_{ij}, g^{ij} ヲ Metrik ノ基本 Tensor ノヤウニ考ヘテ，Vektor ヤ Tensor ノ Index ヲ上ゲタリ下ゲタリスルコトニスル。例ヘバ

$$C_{ijk} = C^{\alpha}_{ij} g_{\alpha k},^{6)} \quad C_{i\cdot\cdot}^{\ jk} = g^{j\alpha} C^{k}_{i\alpha}$$

$\boxed{\text{II}}$ C_{ijk} ハ歪對稱 Tensor デアル（從ッテ $C^{k}_{\cdot ij} = C_{ij\cdot}^{\ \ k}$, $C^{ij}_{\cdot\cdot k} = -C^{ji}_{\cdot\cdot k}$ 等モ成立ツ）

證明. $C_{ijk} = g_{k\alpha} C^{\alpha}_{ij} = C^{\alpha}_{ij} S_p(U_k U_\alpha)$

$$= S_p(U_k C^{\alpha}_{ij} U_\alpha) = S_p(U_k (U_i \circ U_j))$$

$$= S_p(U_k U_i U_j) - S_p(U_k U_j U_i)$$

之レカラ容易ニ分ル。 (終)

次ノ Lemma ハ後ニ用ヒル。

---

6) C^{k}_{ij} ノ k ノ位置ハ三番目ノ上，即チ $C_{ij\cdot}^{\ \ k}$ ト考ヘルノデアル。

$\boxed{\textit{Lemma 1}}$ $c_{l\cdot\cdot}^{\ ij}\, c_{ij}^{\ \ k} = -\delta_l^k$

証明 $c_{l\cdot\cdot}^{\ ij}\, c_{ij\cdot}^{\ \ k} = c_{l\cdot\cdot}^{\ ij}\, c_{ij\alpha}\, g^{k\alpha} = -c_{l\cdot\cdot}^{\ ij}\, c_{\alpha ji}\, g^{k\alpha}$

$$= -c_{li}^{\ \ j}\, c_{\alpha j}^{\ \ i}\, g^{k\alpha}$$

$$= -g_{l\alpha}\, g^{k\alpha} = -\delta_l^k \qquad \text{(終)}$$

$\mathfrak{R}$ ノ一次変換Dガ

(D): $D(x\circ y) = Dx\circ y + x\circ Dy$

ヲ満足スルトキ, Dヲ $\mathfrak{R}$ ノ "Ableitung" トイフ。特ニ $D_a x = a\circ x$ ハ Ableitung デアルガ, 之レヲ $\mathfrak{R}$ ノ innere Ableitung トモ云フ。次ノ定理ハ Cartan 以来ヨク知ラレテ居ル。

$\boxed{\textit{Lemma 2}}$ $\mathfrak{R}$ ガ halbeinfach ナラ, $\mathfrak{R}$ ノ Ableitung ハスベテ innere Ableitung デアル。[7)]

証明. Dヲ $\mathfrak{R}$ ノ任意ノ Ableitung トスル。$\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} + Pd$ ヲ作リ $d\circ d = 0$, $d\circ x = Dx$, $x\in\mathfrak{R}$ ト定義スレバ, Dノ満足スル式(D)ニヨリ $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ Lie-Algebra ニナリ, $\mathfrak{R}$ ハソノ halbeinfach ナ Ideal デアル。$\bar{\mathfrak{R}}' = \mathfrak{R} \neq \bar{\mathfrak{R}}$ ダカラ $\bar{\mathfrak{R}}$ ハ halbeinfach デハナイ。[7a)] 故ニソノ Radikal $\mathfrak{r} \neq 0$. $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{r}$ ハ $\mathfrak{R}$ ノ可解 Ideal ダカラ $=0$ ∴ $\mathfrak{R} + \mathfrak{r}$ ハ Ideal ノ直和デ且少クトモ $\mathfrak{R}$ ヨリ階数ガ1大キイカラ $\bar{\mathfrak{R}}$ ニ一致スル $\bar{\mathfrak{R}} = \mathfrak{R} + \mathfrak{r}$。$\mathfrak{r}$ ハ一次元ダカラ $\mathfrak{r} = (r)$, $r = \alpha d + b$, $b \in \mathfrak{R}$; $\mathfrak{r} \not\subset \mathfrak{R}$ ダカラ $\alpha \neq 0$,

---

7) Pガ complex ノトキハ Cartan ノ Thèse p. 113 ノ

7a) $\bar{\mathfrak{R}}$ ガ halbeinfach ナラ, $\bar{\mathfrak{R}}' = \bar{\mathfrak{R}}$.

$\therefore\ a = -\alpha^{-1} b$ トオクトスレ $= (d - a),\ a \in \mathfrak{R}$ ノ形ニナル。$\mathfrak{R}$ ノ任意ノ元 x ハ $\mathfrak{R}$ ト直交ダカラ，$(d-a)\circ x = 0$ 即 $a \circ x = d \circ x = Dx$. 故ニ $D = D_a$ デ innere Ableitung ニナル。 (終)

次ニ Charakteristik 0 ノ代数的閉体 P ノ上ノ halbeinfach ナ Lie-Algebra $\mathfrak{R}$ ノ構造ニ関シテ、必要ナ結果ヲ挙ゲテオク。[8)]

$\boxed{\text{III}}$ $\mathfrak{R}$ ニ次ノヤウナ Basis $h_1, \cdots\cdots h_n,\ e_\alpha,\ e_{-\alpha},\ \cdots\cdots$ ヲトルコトガデキル。

$$\mathfrak{R} = Ph_1 + \cdots\cdots + Ph_n + Pe_\alpha + Pe_{-\alpha} + Pe_\beta + Pe_{-\beta} + \cdots\cdots + Pe_\rho + Pe_{-\rho}$$

$$h_i \circ h_j = 0 \quad (1 \leqq i, j \leqq n)$$

$h_\lambda = \sum \lambda_i h_i$ トオクトキ

$$h_\lambda \circ e_\alpha = (\alpha, \lambda)\, e_\alpha \qquad (\alpha, \lambda) = \sum \alpha_i \lambda_i \quad \alpha_i \text{ハ有理数}^{9)}$$

$$h_\lambda \circ e_{-\alpha} = -(\alpha, \lambda)\, e_{-\alpha}$$

$$e_\alpha \circ e_{-\alpha} = -\sum \alpha_i h_i$$

$S = h_\lambda + \sigma_\alpha e_\alpha + \sigma_{-\alpha} e_{-\alpha} + \cdots\cdots + \sigma_{-\rho} e_{-\rho}$ ニ對シ

$$\varphi(S, S) = (\alpha, \lambda)^2 + \cdots\cdots + (\rho, \lambda)^2 - 2\sigma_\alpha \sigma_{-\alpha} - \cdots\cdots \cdots\cdots - 2\sigma_\rho \sigma_{-\rho}$$

$(\alpha, \lambda), \cdots\cdots, (\rho, \lambda)$ ノ中一次独立ナモノガ丁度 n 個ア

---

8) 例ヘバ吉田氏：ク一環論.

9) Charakteristik 0 ノ Körper P ハ有理数体ニ同型ナ Primkörper ヲ含ム，ソノ元ヲ簡單ニ「有理数」ト云フコトニスル。

ル。従ツテ $h_1, \cdots\cdots, h_n$ ニ更ニ適當ナ有理係数ノ一次変換ヲ施シテ

$$\varphi(s, s) = g_1\lambda_1^2 + \cdots\cdots + g_n\lambda_n^2 - 2\sigma_\alpha\sigma_{-\alpha} - \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots - 2\sigma_\rho\sigma_{-\rho} \quad (g_i \text{ ハ正ノ有理数})$$

ノ形ニシテアルモノトシテヨイ。

最後ニ標数 0 ノ代数的閉体 P ノ上ノ *halbeinfach* ナ *Lie Algebra* $\mathfrak{R}$ ノ P ニオケル表現 $a \to \overline{A}$ ガアルトキ：

$\boxed{\text{IV}}$ *Teilalgebra* $(h_1, \cdots\cdots, h_n)$ ノ元 $h_\lambda = \sum \lambda_i h_i$ ニ對應スル *Matrix* $\overline{H}_\lambda$ ノ *Eigenwerte* ハスベテ $\lambda_1, \cdots\cdots, \lambda_n$ ノ一次形式

$$\Lambda^{(k)}(h_\lambda) = (\Lambda^{(k)}, \lambda) = \sum_{i=1}^{n} \Lambda_i^{(k)}\lambda_i, \quad k = 1, 2, \cdots\cdots, g \quad (g \text{ ハ } \overline{H} \text{ ノ次数})$$

デ，シカモ係数 $\Lambda_i^{(k)}$ ハスベテ有理数デアル。特ニ $h_i \to \overline{H}_i$ ナラ

$$S_p(\overline{H}_i^2) = \sum_{k=1}^{g} (\Lambda_i^{(k)})^2 \quad \text{ハ有理数} \geqq 0$$

又 $e_\alpha \to \overline{E}_\alpha$ ニ對シテハ $S_p(\overline{E}_\alpha \overline{E}_{-\alpha})$ ハ有理数 $\leqq 0$ [10)]

§3. *Casimir* 行列

標数 0 ノ体 P ノ上ノ *halbeinfach* ナ *Lie algebra* $\mathfrak{R}$ ノ P ニオケル表現 ϑ： $a \to \overline{A}$ ガアルトスル。$\mathfrak{R}$ ノ *Basis* $u_i \to \overline{U}_i$，コノ u_i ニ関シテ g_{ij}，g^{ij} ヲ計

算シ

$$C = g^{ij}\,\overline{U}_i\,\overline{U}_j = \overline{U}_i\,\overline{U}^i = \overline{U}^j\,\overline{U}_j \qquad (\overline{U}^i = g^{i\alpha}\,\overline{U}_\alpha)$$

ナル行列ヲ作ル。形カラ明カナヤウニ $\mathfrak{R}$ ノ Basis $\{u_i\}$ ノトリ方ニハ無関係ニ決ル。[10a] 之ヲ表現 ϑ ノ Casimir 行列ト云フ。

$\boxed{\mathrm{V}}$.（Casimir ノ定理）ϑ ノ Casimir 行列 C ハ表現ノ任意ノ Matrix $\overline{A}$ ト可換デアル：

$$C\overline{A} = \overline{A}C$$

証明：$C\overline{U}_k = \overline{U}_k C$ ヲ云ヘバヨイ．

$$\overline{U}_i\,\overline{U}_k = \overline{U}_i \circ \overline{U}_k + \overline{U}_k\,\overline{U}_i = c_{ik}^{j}\,\overline{U}_j + \overline{U}_k\,\overline{U}_i =$$

注意スレバ

$$\begin{aligned}
C\overline{U}_k &= \overline{U}^i\,\overline{U}_i\,\overline{U}_k = c_{ik}^{j}\,\overline{U}^i\,\overline{U}_j + \overline{U}^i\,\overline{U}_k\,\overline{U}_i \\
&= c_{ikj}\,\overline{U}^i\,\overline{U}^j + \overline{U}_j\,\overline{U}_k\,\overline{U}^j \\
&= c_{ikj}\,\overline{U}^i\,\overline{U}^j + c_{jk}^{i}\,\overline{U}_i\,\overline{U}^j + \overline{U}_k\,\overline{U}_j\,\overline{U}^j \\
&= (c_{ikj} + c_{jki})\,\overline{U}^i\,\overline{U}^j + \overline{U}_k C = \overline{U}_k C \quad \text{（終）}
\end{aligned}$$

$\boxed{\mathrm{VI}}$ ϑ が零表現デナイナラ，$Sp(C)$ ハ正ノ有理数デアル。[11]

証明．$\mathfrak{R}$ ノ Basis トシテ III ノ $h_1, \cdots\cdots, h_n, e_\alpha, \cdots, e_{-\rho}$ ヲ用ヒレバ

---

10) リー環論：31頁．

10a) 表現加群ノ Basis ノ取方ニハ関係スル。

11) リー環論：33頁，P が複素数ノトキ $Sp(C)$ が正ノ実数ニナルコトハ証明シテアル。有理数ニナルコトモ Whitehead, l.c. ニ証明がアルかヨク分ラナイ。

ノ $\varphi(S,S)=g_1\lambda_1^2+\cdots\cdots+g_n\lambda_n^2-2\sigma_\alpha\sigma_{-\alpha}-\cdots\cdots-2\sigma_\rho\sigma_{-\rho}$

ダカラ

$$C=\frac{1}{g_1}\overline{H}_1^2+\cdots\cdots+\frac{1}{g_n}\overline{H}_n^2-2E_\alpha E_{-\alpha}-\cdots\cdots-2E_\rho E_{-\rho}$$

g_i ハ正ノ有理數，又IV ニヨリ $Sp(\overline{H}_i^2)$ ハ有理數$\geqq 0$，$Sp(\overline{E}_\alpha\overline{E}_{-\alpha})$ ハ有理數$\geqq 0$ ダカラ $Sp(C)$ ハ有理數$\geqq 0$ デアル。$Sp(C)$ ガ實際正ナルコトヲ云フニハ $Sp(\overline{H}_i^2)$ ノ中少クトモ一ツ 0 デナイモノガアルコトヲ云ヘバヨイ，ソレニハアル $\overline{H}_i$ ノ少クトモ一ツノ固有値ガ 0 デナイコトヲ云ヘバヨイ。實際 $\overline{H}_1,\cdots\cdots,\overline{H}_n$ ノ固有値ガ全部 0 デアレバ，スベテノ $\overline{E}_\alpha=0$ ナルコトガ云ヘ，$-\sum\alpha_i\overline{H}_i=\overline{E}_\alpha\circ\overline{E}_{-\alpha}=0$ カラ $\overline{H}_i=0$ スナハチ ϑ ガ零表現トナルコトガ証明デキルノデアルガ，ソレハ「リー環論」34頁ニ譲ルコトニスル。

以上ハ §2 ノ III，IV ヲ使ッテキルタメニ P ガ代數的閉体デナケレバナラナイ。

若シ P ガ代數的閉体デナイナラバ P^* ヲ P ノ上ノ代數的閉体トシ，$\mathfrak{K}=Pu_1+\cdots\cdots+Pu_r$ カラ，P^* ノ上ノ *halbeinfach* ナ *Lie algebra* $\mathfrak{K}^*=P^*u_1+\cdots\cdots+P^*u_r$ ヲ作リ，同時ニ $\mathfrak{K}$ ノ P ニオケル表現

$$\vartheta:\ \alpha^i u_i\longrightarrow\alpha^i\overline{U}_i,\ \alpha_i\in P$$

ヲ $\mathfrak{K}^*$ ノ P^* ニオケル表現

$$\vartheta^*:\ \alpha^{*i}u_i\longrightarrow\alpha^{*i}\overline{U}_i,\ \alpha^{*i}\in P^*$$

ニ擴張スル。定義カラ ϑ^* ノ *Casimir* 行列 C^* ハ，ϑ ノ

Casimir 行列Cト一致スル。$S_p(C^*)$ガ正ノ有理數ナルコトハ証明シタカラ，$S_p(C)$モ正ノ有理數デアル。(終)

$\boxed{\text{VII}}$ ϑガ絶對既約表現ナラ，ϑノ Casimir 行列 C ハ

$$C = cE, \quad c \text{ハ正ノ有理數}$$

ノ形デアル。cハ表現類ニ固有ナ一ツノ常數。

証明. Cハ∇ニヨリ，絶對既約ナ行列ノ System ト可換ダカラ，Schur ノ Lemma ニヨリ，$C = cE$ノ形ニナル。ϑノ次數ヲgトスレバ

$S_p(C) = gc =$ 正ノ有理數，故ニ c モ正ノ有理數デアル。(終)

上ノ定理ハ実ハ絶對既約デナク，單ニPニオケル既約表現デモ成立ツ。之レガ後ニ必要ニナル Lemma デアル。

$\boxed{\text{Lemma 3}}$ Pハ標數0ノ任意ノ体，$\mathfrak{K}$ハPノ上ノ halbeinfach ナ Lie algebra，ϑヲ$\mathfrak{K}$ノPニオケル既約表現，$C = C_\vartheta$ヲϑノ Casimir 行列トスル。コノトキ

$$C = cE$$

ノ形ニナリ，$c = c_\vartheta$ハϑノ表現類ニ固有ナ一ツノ正ノ有理數デアル。

証明. ϑノ Darstellungsmodul ヲ$\mathfrak{M}$トスル。$\mathfrak{M}$ノ係數ヲPノ上ノ代數的閉体P^*マデ拡張シ$\mathfrak{M}_{P^*}$トシ，$\mathfrak{M}_{P^*}$ニ含マレルーツノ既約ナ Darstellungsmodul ヲ

$\mathfrak{m}^*$ トスル。$\mathfrak{m}^*$ ノ Basis ヲ $\mathfrak{M}$ ノ Basis ノ一次結合トシテアラハストキ出テ來ル係數ヲ含ム P ノ有限次 galois 擴大體ヲ Γ トスレバ，$\mathfrak{m} = \mathfrak{M}_\Gamma \frown \mathfrak{m}^*$ トスルト $\mathfrak{m}^* = \mathrm{P}^*\mathfrak{m}$ デ，從ツテ $\mathfrak{m}$ ハ絶對既約ナ Darstellungsmodul デアル。Γ/P ノ galois 群ヲ $\mathfrak{G}$ トスレバ，$\sigma \in \mathfrak{G}$ ヲ係數ニ作用サセルコトニヨリ，$\mathfrak{M}_\Gamma$ ノ Automorphismus σ ガデキル。$\mathfrak{m}^\sigma$ ハスベテ絶對既約デ，$\sigma, \tau \in \mathfrak{G}$ ナラ $\mathfrak{m}^\sigma = \mathfrak{m}^\tau$ 若クハ $\mathfrak{m}^\sigma \frown \mathfrak{m}^\tau = 0$。$\mathfrak{m}^\tau = \mathfrak{m}$ ナル τ ノ全體ハ $\mathfrak{G}$ ノ部分群 $\mathfrak{g}$ ヲ作ル。

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{g}\sigma_1 + \mathfrak{g}\sigma_2 + \cdots\cdots + \mathfrak{g}\sigma_j, \quad \sigma_1 = 1$$

各剰群 $\mathfrak{g}\sigma_i$ ニ $\mathfrak{m}_i = \mathfrak{m}^{\mathfrak{g}\sigma_i} = \mathfrak{m}^{\sigma_i}$ ガ對應シ，$i \neq k$ ナラ $\mathfrak{m}_i \frown \mathfrak{m}_k = 0$.

故ニ $\mathfrak{n} = \mathfrak{m}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{m}_j$ ハ直和デ，且ツ $\mathfrak{n}$ ハ $\mathfrak{G}$ ノスベテノ Automorphismus デ不変ダカラ $\mathfrak{n} = \Gamma(\mathfrak{n} \frown \mathfrak{M})$ $\mathfrak{n} \frown \mathfrak{M}$ ハ $\mathfrak{M}$ ニ含マレル Darstellungsmodul $\neq 0$ デアル。故ニ $\mathfrak{M}$ ノ既約性カラ $\mathfrak{n} \frown \mathfrak{M} = \mathfrak{M}$ $\therefore\ \mathfrak{n} = \mathfrak{M}_\Gamma$ 即チ：

$$\mathfrak{M}_\Gamma = \mathfrak{m}_1 + \cdots\cdots + \mathfrak{m}_j$$

ノ如ク互ニ共軛ナ絶對既約ナ Darstellungsmodul ノ和ニ分レル。$\mathfrak{m}_1 = (v_1, \cdots\cdots, v_m)$ ニ對シ $\mathfrak{m}_i = (v_1^{\sigma_i}, \cdots\cdots, v_m^{\sigma_i})$ ナル Basis ガトレルカラ，コノ Basis ニ就イテ表現ノ行列ヲ書クト[12)]，$\vartheta : a \longrightarrow \bar{A}$ ハ Γ ニ於テ

12) C ハ一般ニハ Darstellungsmodul ノ Basis ノ取方ニヨリ変ルガ，今ノバアヒハ結果カラ云ッテ変ラナイカラ，ドノヤウナ Basis ノ取方ヲシテ証明シテモヨイ。

$$a \longrightarrow \begin{vmatrix} \bar{A}_1 & & & \\ & \bar{A}_1^{\sigma_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \bar{A}_1^{\sigma_f} \end{vmatrix} \qquad (a \to \bar{A}_1 \text{ ハ絶對既約})$$

ト zerfallen スル。從ッテ絶対既約表現 $a \longrightarrow \bar{A}_1$ ノ Casimir 行列ヲ $C_1 = c_1 E$ トスレバ

$$C_{\mathfrak{V}} = \begin{vmatrix} c_1 E & & & \\ & c_1^{\sigma_2} E & & \\ & & \ddots & \\ & & & c_1^{\sigma_f} E \end{vmatrix}$$

c_1 ハ VII ニ依ッテ Γ ノ Primkörper ノ元デアル，從ッテ P ニモ含マレ $c_1 = c_1^{\sigma_2} = \cdots\cdots = c_1^{\sigma_f} = c$.

$$\therefore \quad C_{\mathfrak{V}} = cE$$

$c = c_1$ ハ正ノ有理數。 (終)

§4. Levi ノ定理ノ証明.

$\boxed{\text{定理}}$ $\mathfrak{R}$ ヲ標数 0 ノ体 P ノ上ノ Lie Algebra トスル。$\mathfrak{R}$ ハ Radikal $\mathfrak{r}$ ト halbeinfach ナ Teilalgebra $\mathfrak{s}$ トノ（Modul トシテノ）直和ニナル。

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{r} + \mathfrak{s}$$

証明.

(I) 先ヅ $\mathfrak{r}$ ガ可換デ而モ (0) ト $\mathfrak{r}$ 以外ニ $\mathfrak{R}$ ノ Ideal ヲ含マナイトキニ定理ヲ証明スレバ一般ノ場合モソレカラ容

易ニ出ルコトヲ示ス。

一般ノ$\mathfrak{R}$ガ與ヘラレタトキ，$\mathfrak{R}$ノIdealノ列

$$\mathfrak{n}\supset\mathfrak{n}'\supset\mathfrak{n}''\supset\cdots\cdots\supset\mathfrak{n}^{(s)}=(0)$$

ヲ，出来レバ更ニverfeinernシテ，$\mathfrak{R}$ヲOperatorトスルKompositionsreihe $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}_0\supset\mathfrak{n}_1\supset\cdots\cdots\supset\mathfrak{n}_c=0$ヲ作ル。$\mathfrak{n}_i/\mathfrak{n}_{i+1}$ハ可換デアル。$c=1$ノトキ定理ガ証明デキタトシテ，任意ノ$c$ニ就テ証明デキルコトヲ云ヘバヨイ。$c$以下デハ既ニ云ヘタトスル。

$\mathfrak{R}/\mathfrak{n}_1$ハ$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1$ヲRadikalトシ従ッテ$c=1$デアルカラ，$\mathfrak{R}/\mathfrak{n}_1$ノhalbeinfachナTeilalgebra $\mathfrak{s}_1/\mathfrak{n}_1$; ($\mathfrak{s}_1\supset\mathfrak{n}_1$)ガアリ $\mathfrak{R}/\mathfrak{n}_1=\mathfrak{n}/\mathfrak{n}_1+\mathfrak{s}_1/\mathfrak{n}_1$ 即チ $\mathfrak{R}=(\mathfrak{n},\mathfrak{s}_1)$デ$\mathfrak{n}\cap\mathfrak{s}_1=\mathfrak{n}_1$。$\mathfrak{n}_1$ハ$\mathfrak{s}_1$ノRadikalデアル。$\mathfrak{n}_1$ノKompositionsreiheノ長サハ高々$c-1$デアルカラ$\mathfrak{s}_1=\mathfrak{n}_1+\mathfrak{s}$ナル$\mathfrak{s}_1$ノTeilalgebra $\mathfrak{s}$ガアリ$\mathfrak{n}_1\cap\mathfrak{s}=\mathfrak{n}\cap\mathfrak{s}=0$ $\quad\therefore\ \mathfrak{R}=(\mathfrak{n},\mathfrak{s}_1)=\mathfrak{n}+\mathfrak{s}$

(II) $\mathfrak{R}=(u_1,\cdots\cdots,u_r,v_1,\cdots\cdots,v_g)$, $\mathfrak{n}=(v_1,\cdots\cdots,v_g)$; $\mathfrak{n}$ハ可換デ且$\mathfrak{R}$ノIdealヲ含マナイトスル。

$$u_i\circ u_j=c_{ij}^k u_k+a_{ij}^\alpha v_\alpha,\quad u_i\circ v_\alpha=h_{i\alpha}^\beta v_\beta,$$
$$v_\alpha\circ v_\beta=0.$$ [13]

u_iノmod $\mathfrak{n}$ノKlasseヲ$\bar{u}_i$トセバ $\bar{u}_i\circ\bar{u}_j=c_{ij}^k\bar{u}_k$

---

13) uノsuffix 1,……,rハローマ字デ，vノsuffix 1,……,gハギリシャ字デアラハス。

デアッテ，$\mathfrak{K}/\mathfrak{v}$ ハ halbeinfach ダカラ，$g_{ij}=c^k_{il}c^l_{jk}$ ガ ausarten セズ，従ッテ g^{ij} ヲ作ッテ Index ヲ上下スルコトガ出来ル。又 $\mathfrak{v}$ ヲ $\mathfrak{v}$ ニ對シテハ $r\circ v_\alpha=0$ ダカラ

$$\bar{u}_i\circ v_\alpha=h^\beta_{i\alpha}v_\beta$$

ト書イテヨイ。$\vartheta:\bar{u}_i\longrightarrow\bar{U}_i=\|h^\beta_{i\alpha}\|$ ハ halbeinfach ナ Lie algebra $\bar{\gamma}=\mathfrak{K}/\mathfrak{v}$ ノ $\mathfrak{v}$ ヲ Darstellungsmodul トスル表現デアル。$\mathfrak{v}$ ハ $\mathfrak{K}$ ヲ Operator トシテ einfach，即チ表現 ϑ ハ既約表現デアル。

問題ハ $\bar{u}_i$ ノ代表トシテ u_i ノ代リニ適當ナ $u^*_i=u_i+t^\alpha_iv_\alpha$ ヲトッテ，a^α_{ij} ノ如キ係数ヲナクスルコトデアル。

$$u^*_i\circ u^*_j=c^k_{ij}u^*_k$$

$$\begin{aligned}u^*_i\circ u^*_j&=(u_i+t^\alpha_iv_\alpha)\circ(u_j+t^\alpha_jv_\alpha)\\&=c^k_{ij}u_k+a^\beta_{ij}v_\beta+h^\beta_{i\alpha}t^\alpha_jv_\beta-h^\beta_{j\alpha}t^\alpha_iv_\beta\\&=c^k_{ij}u^*_k+(a^\beta_{ij}+h^\beta_{i\alpha}t^\alpha_j-h^\beta_{j\alpha}t^\alpha_i-c^k_{ij}t^\beta_k)v_\beta\end{aligned}$$

デアルカラ

$$(1)\quad a^\beta_{ij}+h^\beta_{i\alpha}t^\alpha_j-h^\beta_{j\alpha}t^\alpha_i-c^k_{ij}t^\beta_k=0,$$

$$1\leqq i,j\leqq r,\ 1\leqq\beta\leqq g$$

ナル r^2g ケノ方程式ヲ満足スルヤウニ，rg 個ノ係数 t^β_k ヲ決メルトイフ問題ニナル。

(III) ϑ ガ零表現ナルトキ。既約表現ダカラ次数 $g=1$ デアル。故ニ v ノ Index ハ書カナイコトニスレバ，(1) ハ

(2) $a_{ij}=c_{ij}^{k}t_{k}, \quad 1\leqq i,j\leqq r$

ナルr^2ケノ式ニナル。之レカラrケノt_kガ解ケルナラバ，Lemma 1ニヨリ

$$t_l=\delta_l^k t_k=-c_l^{ij}\cdot c_{ij}^{\cdot k}t_k=-c_l^{ij}a_{ij}$$

ト一意的ニ解ケル。実際解ケルコトハ次ノヤウニシテ分ル。

$$[u_i u_j u_k]=[u_i\circ u_j]\circ u_k+[u_j\circ u_k]\circ u_i$$
$$+[u_k\circ u_j]\circ u_j=0$$

ノvノ係数 $c_{ij}^{l}a_{lk}+c_{jk}^{l}a_{li}+c_{ki}^{l}a_{lj}=0,$

即チ $(a_l^{\cdot k}=g^{km}a_{lm})$

$$c_{ij}^{l}a_l^{\cdot k}=a_i^{\cdot l}c_{lj}^{k}+a_j^{\cdot l}c_{il}^{k}.$$

之ハ $\bar{u}_l\to A\bar{u}_l=a_l^{\cdot k}\bar{u}_k$ ガ

$$A(\bar{u}_i\circ\bar{u}_j)=A\bar{u}_i\circ\bar{u}_j+\bar{u}_i\circ A\bar{u}_j$$

ヲ満足スルコト，即チ halbeinfach ナ Lie Algebra $\bar{\mathfrak{r}}$ ノ Ableitung ナルコトヲ示シテヰル。Lemma 2ニヨリ

$$A\bar{u}_l=\bar{t}\circ\bar{u}_l \qquad \bar{t}=t^k\bar{u}_k\in\bar{\mathfrak{r}}$$

即チ $\quad a_l^{\cdot m}=t^k c_{kl}^{m}$ 或ハ $a_{lm}=c_{lm}^{k}t_k$

従ッテ(2)ハ解ケル。

(注意) 逆ニ$\mathfrak{K}$ノRadikal $\mathfrak{v}$ガ一次元ナラ，$\mathfrak{J}$ハ

halbeinfach ナ *Lie Algebra* ノ一次ノ表現, 従ッテ零表現デナケレバナラナイ。コノトキ上ノ証明ニヨリ $\mathfrak{f}$ ハ一意的ニ決リ, 且ッ $\mathfrak{f}$ モ $\mathfrak{R}$ ノ *Ideal* デアル。即チ次ノ定理ヲ得ル。

「$\mathfrak{R}$ ノ *Radikal* $\mathfrak{r}$ ガ一次元ナラバ, $\mathfrak{R}$ ハ *halbeinfach* ナ *Ideal* $\mathfrak{f}$ ト $\mathfrak{r}$ トノ直和ニナル。分解ハ一意的デアル。」

(IV) ϑ ガ零表現デナイ場合ニ (1) ヲ解ク。

$$A_i = \begin{pmatrix} t_i^1 \\ \vdots \\ t_i^g \end{pmatrix} \qquad \mathfrak{a}_{ij} = \begin{pmatrix} a_{ij}^1 \\ \vdots \\ a_{ij}^g \end{pmatrix} \qquad \overline{U}_i = \begin{pmatrix} h_{i1}^1 & \cdots & h_{ig}^1 \\ & h_{i\beta}^\alpha & \\ h_{i1}^g & \cdots & h_{ig}^g \end{pmatrix}$$

トカクト,

(1) ハ r^2 ケノ *Vektor* 方程式

$$(1') \quad \mathfrak{a}_{ij} + \overline{U}_i \cdot A_j - \overline{U}_j \cdot A_i - c_{ij}^k A_k = 0$$

ニナル。一方 $[u_i\, u_j\, u_k]$ ノ v_α ノ係数ヲ書キ上ゲルト

$$c_{ij}^l a_{lk}^\alpha + c_{jk}^l a_{li}^\alpha + c_{ki}^l a_{lj}^\alpha - a_{ij}^\beta h_{k\beta}^\alpha - a_{jk}^\beta h_{i\beta}^\alpha - a_{ki}^\beta h_{j\beta}^\alpha = 0$$

或ハ

$$(3) \quad \overline{U}_k \mathfrak{a}_{ij} + (\overline{U}_i \mathfrak{a}_{jk} + c_{ki}^l \mathfrak{a}_{jl}) - (\overline{U}_j \mathfrak{a}_{ik} + c_{kj}^l \mathfrak{a}_{il}) - c_{ij}^l \mathfrak{a}_{lk} = 0$$

左辺ニ $\bar{U}^k = g^{kl}\bar{U}_l$ ヲ乗ズル。

$\bar{U}^k\bar{U}_k = \vartheta$, Casimir 行列 $= cE$, $c \neq 0$

$$\bar{U}^k(\bar{U}_i\alpha_{jk} + c_{ki}{}^l\alpha_{jl}) = \bar{U}^k\bar{U}_i\alpha_{jk} + \bar{U}_i\circ\bar{U}^l\alpha_{jl}$$

$$= (\bar{U}^k\bar{U}_i + \bar{U}_i\circ\bar{U}^k)\alpha_{jk} = \bar{U}_i\bar{U}^k\alpha_{jk}$$

全様ニ $\bar{U}^k(\bar{U}_j\alpha_{ik} + c_{kj}{}^l\alpha_{il}) = \bar{U}_j\bar{U}^k\alpha_{ik}$

従ッテ (3) カラ

$$c\alpha_{ij} + \bar{U}_i(\bar{U}^k\alpha_{jk}) - \bar{U}_j(\bar{U}^k\alpha_{ik}) - c_{ij}{}^l(\bar{U}^k\alpha_{lk}) = 0$$

故ニ

(4) $A_i = c^{-1}\bar{U}^k\alpha_{ik}$

ト置ケバ，(1')が満足サレル。之レデスッカリ証明ハ済ンダ。

(終)

(注意) コノトキハ A_i ハ一意的ニハ決ラナイ。A_i ノ一般解ハ特別解

(4) $A_i^{(0)} = c^{-1}\bar{U}^k\alpha_{ik}$

ニ(1')ニ附随スル斉次方程式

(5) $\bar{U}_i\check{u}_j - \bar{U}_j\check{u}_i - c_{ij}^k\check{u}_k = 0$

ノ一般解 $\check{u}_i$ ヲ加ヘタ。

$$A_i = A_i^{(0)} + \check{u}_i$$

デアル。（5）ノ解トシテハ，一見シテ直チニ分ルヤウニ，

$$\check{u}_i = \overline{U}_i\, w, \qquad w = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_g \end{bmatrix} \quad (w_1, \cdots\cdots, w_g \text{ ハ全ク任意})$$

ガアル。[14] ϑ ハ零表現デハナイカラ，$w \neq 0$ ナラ，$\check{u}_1, \cdots\cdots, \check{u}_r$ ハ悉ク 0 デハナイ．故ニ A_i ハ事實一意的デナイコトガ分ル。

---

14) 之以外ニ方程式(5)ノ解ハナイノデハアルマイカ？